Е.Ю.Петров, Р.Р.Русаков

ПОТОКОВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

E.Y.Petrov, R.R.Rusakov

Streaming implementation of linear algebraic equations systems solutions

Ключевые слова: СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Keywords: SOLUTIONS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

В статье описывается эффективный вариант решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на программируемых логических интегральных схемах. Приводятся эскизы схемных решений.

The article describes an efficient decision method for linear algebraic equation systems (SLAE) using programmed logic integrated schemes. Sketches of circuit decisions are provided.

Проблема современной радиолокации – борьба с активными помехами. Такая помеха излучается специализированной радиолокационной станцией, как правило, размещенной на авиатехнике. Назначение помехи – сделать полезный, отраженный от цели сигнал неразличимым на фоне собственной высокой мощности. И задача радиолокационной станции – определить направление на источник активной помехи и исключить прием на этом направлении, скорректировав соответствующим образом диаграмму направленности фазированной антенной решётки (ФАР).

В общих чертах алгоритм определения этого направления следующий:

1. Накопить поток данных со всех элементов РЛС за определенный промежуток времени.

2. Составить корреляционную матрицу ФАР.

3. Дополнить полученную матрицу начальным нулевым вектором, образуя систему линейных алгебраических уравнений. В дальнейшем вектор свободных членов системы образуется из ранее найденных решений предыдущей системы.

4. Система линейных алгебраических уравнений решается одним из известных способов решения СЛАУ [1-3]. По полученному решению производится экспертная оценка направления на источник активной помехи.

Таким образом, в текущем проекте решение системы линейных алгебраических уравнений используется для корректировки диаграммы направленности фазированной антенной решётки (ФАР).

Система из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными имеет вид:

$(1)\ a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$(2)\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$

...

$(n)\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$

Матрица A коэффициентов перед неизвестными $x_1 \ldots x_n$ называется исходной матрицей системы, b – столбцом свободных членов. Краткая запись: $Ax = b$.

Система линейных уравнений, обладающая решениями, называется *совместной*. В противном случае система *несовместна*. Система называется *определенной*, если она имеет одно единственное решение и *неопределенной* - в противном случае.

В своей работе мы предполагаем, что СЛАУ заведомо совместна.

Существует два основных класса методов решения СЛАУ: *классические* и *итерационные*. Итерационные методы, несмотря на свои преимущества, плохо применимы для данной задачи по следующим причинам:

1. Аппаратная реализация требует жестких временных привязок, а время вычисления решения СЛАУ итерационным методом в значительной степени зависит от выбранного начального приближения.

2. При аппаратной реализации используется оптимальная (достаточно ограниченная) разрядная сетка. Использование итерационных методов приведет к накоплению существенной ошибки округления.

Классические методы решения лишены перечисленных недостатков.

Среди таких методов решения СЛАУ, как метод определителей, обратной матрицы и метод исключения, последний предоставляет наилучшие возможности для распараллеливания алгоритма, и, поэтому, оптимален для аппаратной реализации.

Идея метода заключается в том, чтобы исходную систему привести к ступенчатому виду:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{nn}x_n = b_n$$

Так как эта система получена путем элементарных преобразований над исходной системой, то по теореме об эквивалентности множества решений исходной системы и ступенчатой совпадают.

Схема реализована следующим образом. Матрица коэффициентов A и вектор свободных членов b размещаются в одном пространстве памяти последовательно (Таблица 1).

Таблица 1

		Смещение				
Первоначальный индекс	Базовый адрес	0	1	…	N-1	N
1	0	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	…	$a_{1,N}$	b_1
…						
k	N×(k-1)+1	$a_{k,1}$	$a_{k,2}$	…	$a_{k,N}$	b_k
…						
N	N×N-k+1	$a_{N,1}$	$a_{N,2}$	…	$a_{N,N}$	b_N

При обращении к элементу матрицы используется комбинация линейной адресации (для столбцов) и независимой индексации (для строк).

Такая организация позволяет значительно упростить процедуру перестановки строк, необходимую для схемы «полного выбора».

Чтобы произвести перестановку строки, достаточно поменять местами номера в индексной таблице. При выборке элемента из массива памяти, достаточно подать на вход схемы только номера строки и столбца элемента в матрице – механизм индексации позволяет сделать процедуру замещения номера строки «прозрачной».

Для решения СЛАУ выбранным методом необходимо выполнить следующие этапы:

1. Схема полного (частичного) выбора – выбор ведущего элемента.
2. Прямой ход – приведение матрицы к ступенчатому виду.
3. Обратный ход – определения значения неизвестных СЛАУ.

Схема частичного или полного выбора применяется для уменьшения влияния ошибок округления, возникающих при делении на ведущий элемент

- абсолютные величины ведущих элементов не должны быть близки к нулю, иначе точность метода может быть сколь угодно низкой. Для решения этой проблемы, на k-м шаге метода, уравнение с номером k меняется местами с уравнением, в котором перед x_k находится максимальный по модулю коэффициент.

Предположим, что коэффициенты матрицы расположены во внутренней памяти нашего устройства и передаются параллельным потоком по n-каналам в блок решения СЛАУ. Поиск экстремума предлагается производить на основе пирамидальной схемы, изображенной на рисунке 1. На входе схемы – последовательность комплексных чисел под стробом. На выходе - номер экстремума последовательности.

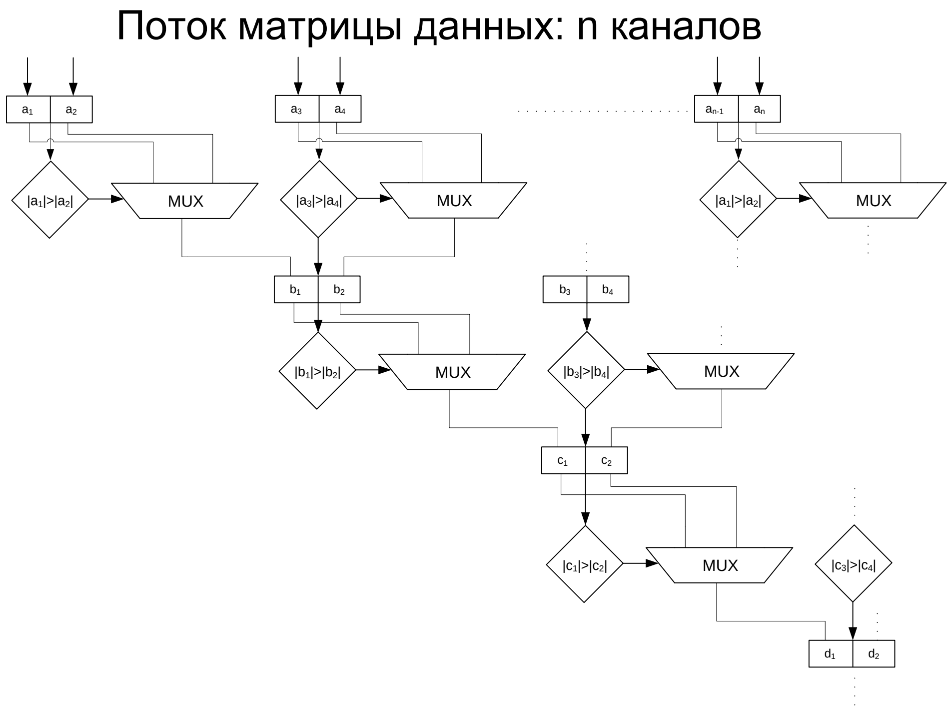

Рисунок 1. Схема потокового поиска экстремума.

На каждом такте работы схемы текущий экстремум строки сравнивается с текущим глобальным экстремумом, поэтому общий результат работы появляется на выходе схемы за $log_2 n$ тактов. Затем найденное значение помещается на место ведущего элемента: перемещение элемента по строкам происходит за счет их физического обмена, а задача перемещения по столбцам решается посредством механизма индексации столбцов (модификация индексной таблицы).

Упрощенная схема поточной реализации прямого хода изображена на рисунке 2.

Перед каждой итерацией в памяти происходит накопление результатов комплексного деления элементов столбца, содержащего экстремум (с учетом индекса), на значение экстремума:

$$c_i = \frac{a_{k+1,k}}{a_{k,k}}$$

Вычисленные значения располагаются в специальной памяти и через систему коммутаторов подаются на соответствующие параллельные блоки вычитаний.

На k-м шаге метода производится N-k полных вычитаний. Полное вычитание состоит из $N+1$ (N столбцов и вектор свободных членов) вычитаний по формуле:

$$a_{k+1,j} - \frac{a_{k,j}a_{k+1,k}}{a_{k,k}}$$

Вычисления производятся параллельно, что позволяет получать результат на каждом такте работы схемы, сразу после заполнения памяти.

Полученные разности замещают в памяти исходные коэффициенты матрицы, что позволяет рационально использовать ресурсы аппаратуры.

На схеме не отображены блоки денормализации и нормализации пар комплексных чисел, включенные в блоки умножения. Так же опущены блоки управления потоками чисел с коммутаторов. Следующая итерация алгоритма происходит аналогично, за исключением количества обрабатываемых строк.

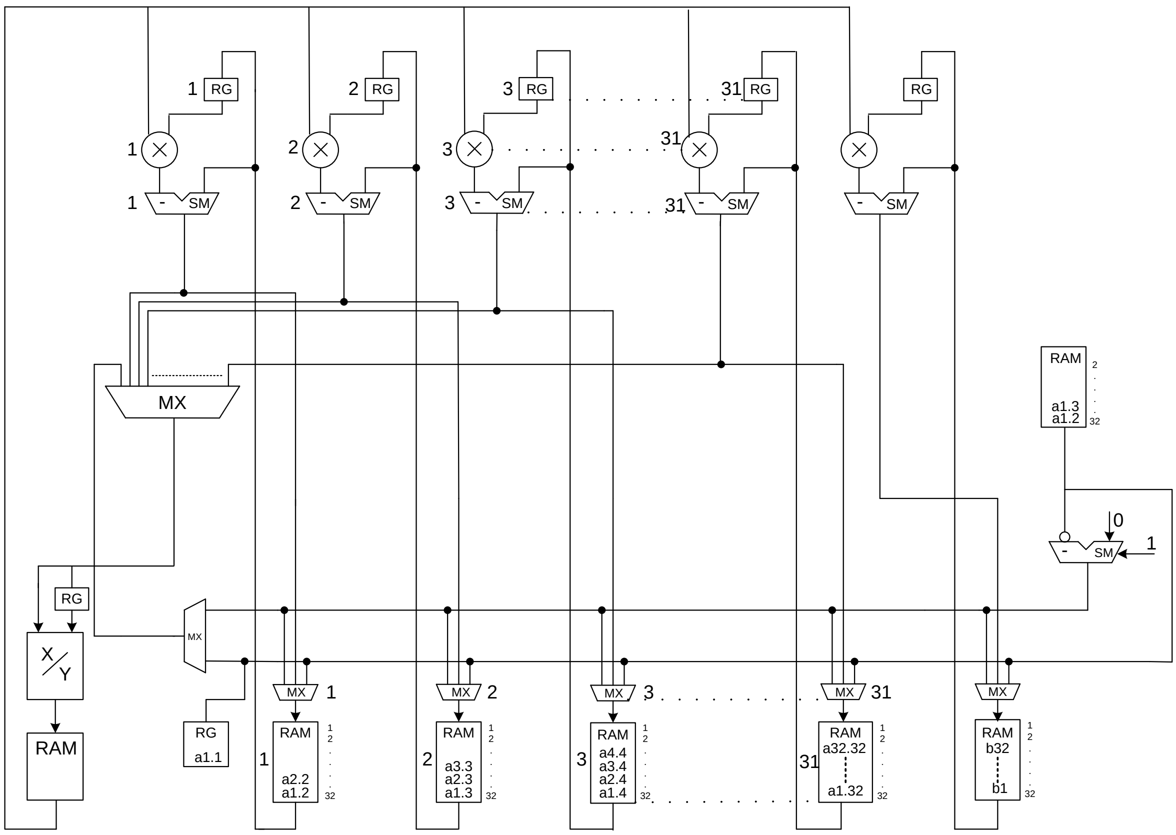

Рисунок 2. Упрощенная схема прямого хода метода Гаусса.

Схема, изображенная на рисунке 3, реализует идею обратного хода метода Гаусса.

Просуммированные произведения коэффициентов матрицы и известных значений переменных вычитаются из коэффициентов свободных членов, а затем делятся на коэффициент, стоящий перед неизвестной переменной.

Результат «обратного хода» для одной переменной определяется по формуле:

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{i=N}^{k+1} a_{k,i} x_i}{a_{k,k}}$$

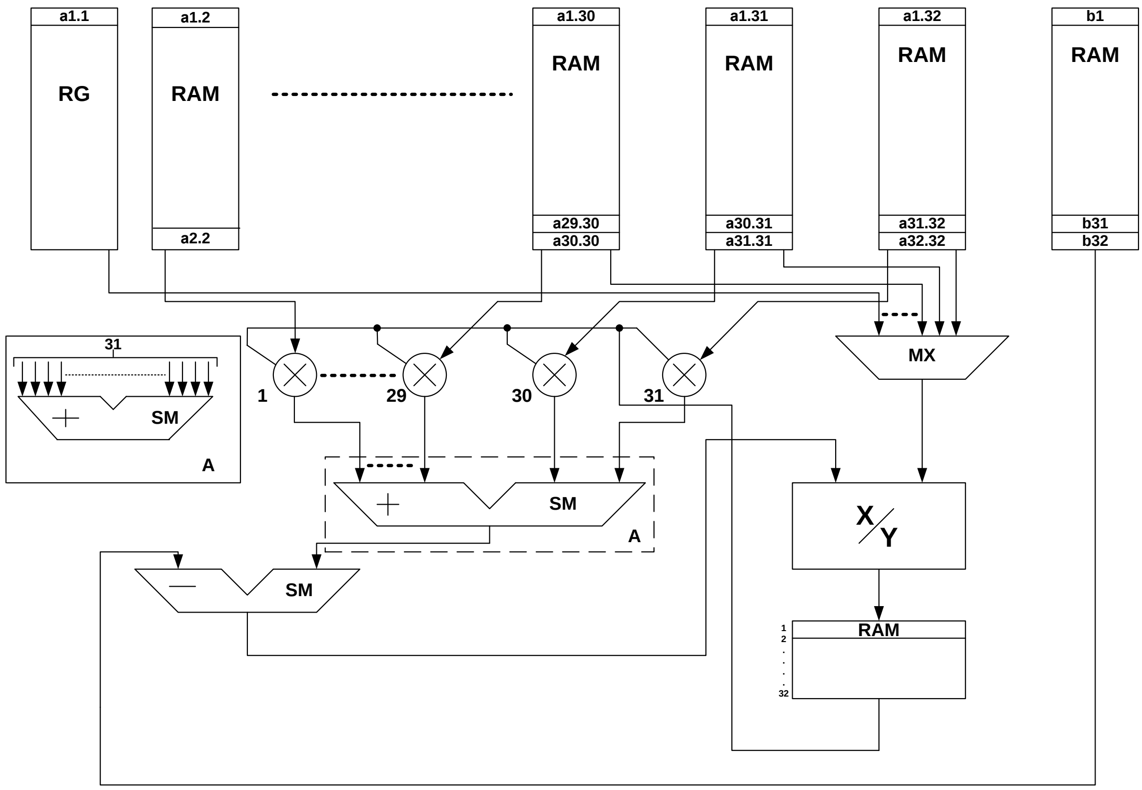

Рисунок 3. Упрощенная схема обратно хода метода Гаусса.

Схема предусматривает поточную обработку результатов схемы прямого хода - исходными данными является элементы треугольной матрицы хранящейся в двухпортовой памяти. Для получения *n* искомых коэффициентов необходимо *n* проходов. На каждом проходе находится частное от деления, которое помещается в память на n слова. Делителями являются последние элементы столбцов матрицы. Делимое является разностью значений правых частей матрицы при выборе от последнего к первому и сумм произведений. Сумма произведений формируется как сумма произведений текущей строки на соответствующие значения полученных решений на предыдущих проходах. Для примера рассмотрим нахождения первых элементов.

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}\ ; \qquad x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}\, x_n}{a_{n-1,n-1}}\ ;$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - \left(a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n\right)}{a_{n-2,n-2}}$$

Полученный вектор-решение помещается в выходную память устройства и замещает собой предыдущий результат работы схемы.

Предложенный метод потокового решения СЛАУ может быть сравнительно легко реализован на любом современном языке описания аппаратуры. Блок комплексного деления был разработан сотрудниками института.

Заключение

Рассмотренная схема реализации метода исключения обладает хорошей масштабируемостью и подходит для решения совместных СЛАУ произвольной размерности. Для реализации метода комплексного деления, можно использовать метод линейно-кусочной аппроксимации.

Метод Гаусса вполне эффективен для проверки системы на совместность, поэтому незначительная модификация схемы позволит, к примеру, вычислять ранг матрицы A или находить общее решение СЛАУ.

К достоинствам схемы, в первую очередь, относятся высокая эффективность использования ресурсов микросхем ПЛИС и сравнительная легкость реализации.

Литература

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.П. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Мир, 1998.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970.
3. Бут Э.Д. Численные методы. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959